

293) Dado el punto $P(6, 1, 1)$ resolver las dos cuestiones siguientes:

1º) Hallar la ecuación de la recta que pasa por dicho punto P y es perpendicular al plano $3x - 4y + 6z = 6$.

2º) Ecuación de la recta perpendicular a las rectas:

$$\frac{x-8}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-6}{3} \quad \text{y} \quad \frac{x-2}{6} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{7}$$

1º) Para que una recta y un plano sean perpend. debe cumplirse:

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}$$

la ecuación de la recta:

$$\left| \frac{x-6}{3} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z-1}{6} \right|$$

2º) Determinaremos un plano Π que sea paralelo a las dos rectas dadas, y luego por cada una de ellas trazaremos el perpendicular a Π . Estos dos últimos planos nos definirán la recta solución.

Sea $Ax + By + Cz = 0$ un plano que pasa por el origen.

Determinaremos su ecuación obligando a que sea paralelo a las dos rectas dadas.

$$3A + 4B + 3C = 0$$

$$6A + 3B + 7C = 0$$

$$\text{luego el plano es: } \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

$$19x - 3y - 15z = 0$$

Buscamos la ecuación del plano que pasa por la primera recta y es perpendicular al anterior.

a) obligamos a que pase por $(8, 3, 6)$:

$$A(x-8) + B(y-3) + C(z-6) = 0$$

b) Para que sea paralela a la recta

$$3A + 4B + 3C = 0$$

c) Finalmente si ha de ser perpendicular a π_1

$$19A - 3B - 15C = 0$$

por tanto el plano es:

$$\begin{vmatrix} x-8 & y-3 & z-6 \\ 3 & 4 & 3 \\ 19 & -3 & -15 \end{vmatrix} = 0$$

Análogamente respecto a la otra recta tenemos

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 \\ 6 & 3 & 7 \\ 19 & -3 & -15 \end{vmatrix} = 0$$

La recta solución viene dada toda como intersección de estos dos planos

(294) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(4, 4, 1)$ y que corta perpendicularmente a la recta.

$$\frac{x-7}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{-4}$$

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c} ; \text{ una recta}$$

$$Ax + By + Cz + D = 0 ; \text{ un plano}$$

son perpendiculares se verifica:

$$\frac{A_1}{a_1} = \frac{B_1}{b_1} = \frac{C_1}{c_1}$$

plano perpendicular a la recta la ecuación

$$x + 3y - 4z + D = 0$$

punto $(4, 4, 1)$

$$4 + 12 - 4 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{D = -12}$$

solución $\boxed{x + 3y - 4z - 12 = 0}$

(295) Determinese la ecuación del plano que pasa por el punto $(2, -3, 4)$ y que es perpendicular a los planos $x + 2y - z = 8$ y $7x - 2y + z =$

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$3A + -3B + 4C + D = 0$$

$$A + 2B - C = 0$$

$$7A - 2B + C = 0$$

sistema homogéneo
 $A=B=C=0$

$$\begin{vmatrix} x & y & z & +1 \\ 2 & -3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 7 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\boxed{y + 2z + 11 = 0}$$

296 Hallar la distancia entre el punto $(-2, 3, 0)$ y la recta

$\frac{x-2}{4} = \frac{y+3}{5} = \frac{z+1}{2}$. Asimismo, encontrar la distancia entre dicho punto y el plano $x-2y+8z=3$

Si el plano pasa por $(-2, 3, 0)$ su ecuación será:

$$A(x+2) + B(y-3) + Cz = 0$$

como ha de ser perpendicular a la recta:

$$4(x+2) + 5(y-3) + 2z = 0$$

$$4x + 5y + 2z = 7$$

El punto de corte:

$$4x + 5y + 2z = 7$$

$$5x - 4y = 22$$

$$2y - 5z = -1$$

$x =$

ALGEBRA: PROBLEMAS LINEALES SOBRE RECTAS PLANOS.

Ecuación general del plano es $Ax + By + Cz + D = 0$

Los cosenos directores de la $\perp$ trazada al plano por el origen son.

$$\cos \alpha = \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} ;$$

$$\cos \beta = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} ;$$

$$\cos \gamma = \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

La distancia del plano al origen es:

$$\frac{-D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = d$$

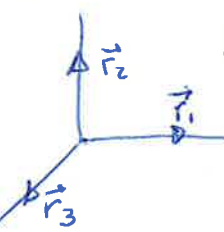
Ecuación normal: $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = d$

En función de los segmentos que determina sobre los ejes:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Ecuación vectorial.

tres puntos del plano. Sea $\vec{r}$ el vector de posición de otro punto cualquiera.



los vectores de posición de

triple producto escalar:

$$(\vec{r} - \vec{r}_1) \cdot [(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \wedge (\vec{r}_3 - \vec{r}_1)] = 0$$

Ecuación paramétrica -

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + \mu(\vec{r}_3 - \vec{r}_1)$$

Ecuación del plano que pasa por un punto. (x_1, y_1, z_1)

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$

La A, B, y C se determinarán con las demás condiciones

Ecuación del haz de planos que pasan por una recta.

Sea la recta dada como intersección de dos planos.

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

La ecuación de plano haz es:

$$(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

Ecuación del plano que pasa por tres puntos

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3).$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Posición de un plano respecto al triedro de referencia.

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Plano que corta a los tres ejes.

$$Ax + By + D = 0$$

un plano paralelo al eje del mismo nombre que la variable que falta.

$$Ax + By + Cz = 0$$

plano que pasa por el origen.

$$Ax + By = 0$$

plano pasa por el eje cuya variable falta.

$$Ax + D = 0$$

plano paralelo al que determinan los dos ejes del mismo nombre que las variables que faltan

$$x = 0$$

si faltan dos variable el termino independiente tenemos un plano coordenado.

Distancia entre dos planos paralelos. -

(2)

Sean $\begin{cases} Ax + By + Cz + D_1 = 0 \\ Ax + By + Cz + D_2 = 0 \end{cases}$ Los planos dados

$$d = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Distancia de un punto a un plano

Sea un plano $Ax + By + Cz + D = 0$ y un punto $P(x_1, y_1, z_1)$. La distancia viene dada por

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Ángulo de dos planos.

Sean los planos $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

$$\cos \theta = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

La condición para que tres planos formen un triedro es que el sistema que forman sus ecuaciones sea compatible y determinado.

Una recta puede venir dada como intersección de dos planos:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Ecuación continua: supongamos una recta r que pasa por el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ y sean a, b, c las coordenadas de un punto cualquiera de la paralela a r trazada por el origen.

La ecuación de r en forma continua es:

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

Los cosenos directores valen:

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} ; \cos \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} ; \cos \gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Ecuación vectorial de la recta: - Si conocemos dos puntos de la recta que vienen dados por sus vectores de posición $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ y elegimos $\vec{r}$ el vector de posición de otro punto cualquiera de la recta, resultará que $\vec{r} - \vec{r}_1$ y $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ serán paralelos. Esto último implica la anulación de su producto vectorial, es decir:

$$(\vec{r} - \vec{r}_1) \wedge (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = 0$$

$$\boxed{\vec{r} \wedge (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{r}_1 \wedge (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}$$

Ecuación paramétrica de la recta.

Si los vectores de posición de dos puntos de la recta son $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ tendremos:

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}$$

Posiciones particulares de la recta.

Si la recta es paralela a uno de los ejes viene dada por la intersección de dos planos paralelos a aquellos planos coordenados que contiene a dicho eje.

Si la recta es paralela a uno de los planos coordenados por ejemplo al YOZ , viene dada por:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ x = k \end{cases}$$

$$\text{o bien } \frac{y-y_0}{\cos \beta} = \frac{z-z_0}{\cos \gamma} ; x = x_0 ; \text{ ya que } \cos \alpha = 0$$

3
Ecuación de la recta que pasa por dos puntos:

$$(x_1, y_1, z_1) \text{ y } (x_2, y_2, z_2)$$

$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_1-x_2} = \frac{y-y_1}{y_1-y_2} = \frac{z-z_1}{z_1-z_2}}$$

Angulo de dos Rectas.

$$\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{b_1} = \frac{z-z_0}{c_1}$$

$$\frac{x-x_1}{a_2} = \frac{y-y_1}{b_2} = \frac{z-z_1}{c_2}$$

$$\cos V = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

Area de un triangulo - si las coordenadas de los vertices son:

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$$

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2}$$

• Angulo de recta y plano.

consideremos la recta.

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

y el plano $Ax + By + Cz + D = 0$ el ángulo que forman viene dado por

$$\sin V = \frac{Aa + Bb + Cc}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Condiciones de perpendicularidad y paralelismo.

Sean las rectas: $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$

$$\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1}$$

y los planos:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

PARALELISMO

Recta y plano $A_1a_1 + B_1b_1 + C_1c_1 = 0$

Recta y recta $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$

Plano y plano $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

PERPENDICULARIDAD

Recta y plano $\frac{A_1}{a_1} = \frac{B_1}{b_1} = \frac{C_1}{c_1}$

Recta y recta $aa_1 + bb_1 + cc_1 = 0$

plano y plano $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

276 Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos

$$A(2, 1, 0), B(1, 1, 3), C(0, 0, 2)$$

- la ecuación de la recta $Ax + By + Cz + D = 0$

$$\left. \begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0 \\ 2A + B + D &= 0 \\ A + B + 3C + D &= 0 \\ 2C + D &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Para que el sistema homogéneo tenga solución diferente de la impropia $A=B=C=D=0$ tendremos

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} (-2+x) & -1+y & z \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3x - 4y + z = 2$$

277

Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(-1, 3, 0)$ y por la recta $x + 2y - z = 2$; $2x - 3y + 4z = 1$

la recta viene dada por la $\cap$ de los planos

$$P \equiv x + 2y - z = 2 \quad \text{y} \quad P' \equiv 2x - 3y + 4z = 1$$

- la ecuación har de ^{dos} los planos es

$$(x + 2y - z - 2) + \lambda(2x - 3y + 4z - 1) = 0$$

Imponemos la condición de que pase por el punto $(-1, 3, 0)$

$$(-1 + 6 - 2) + \lambda(-2 - 9 - 1) = 0$$

$$3 + \lambda(-12) = 0; \quad -12\lambda = -3$$

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{4}}$$

Luego la ecuación buscada es:

$$(x + 2y - z - 2) + \frac{1}{4} (2x - 3y + 4z - 1) = 0$$

$$(x + 2y - z - 2) + \frac{2}{4}x - \frac{3}{4}y + z - \frac{1}{4} = 0$$

$$\frac{6x}{4} + \frac{5y}{4} - \frac{9}{4} = 0$$

$$\boxed{6x + 5y - 9 = 0} \quad \text{este plano es paralelo al eje } OZ.$$

(278) Hallar la ecuación del plano que pase por el punto $(3, 2, 5)$ y es paralelo al plano $2x - y + 3z = 4$

La e. general de los planos paralelos:

$$\underline{Ax + By + Cz + D + \lambda = 0}$$

$$2x - y + 3z - 4 + \lambda = 0$$

pasa por el punto $(3, 2, 5)$:

$$6 - 2 + 15 - 4 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -15$$

Luego el plano es:

$$\boxed{2x - y + 3z - 19 = 0}$$

279) Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(0, 1, 2)$ y $B(1, 3, -1)$ y que es paralelo a la recta

$$P: x + 2y - 3z = 0 ; Q: x - 4y + z = 2.$$

Los planos paralelos a la recta $P=0$; $Q=0$ tienen la ecuación

$$P + \alpha Q + \beta = 0$$

$$(x + 2y - 3z) + \alpha(x - 4y + z - 2) + \beta = 0$$

- como ha de pasar por $A(0, 1, 2)$

$$2 - 6 + \alpha(-4 + 2 - 2) + \beta = 0$$

$$-4 - 4\alpha + \beta = 0$$

- como ha de pasar por $B(1, 3, -1)$

$$1 + 6 + 3 + \alpha(1 - 12 - 1 - 2) + \beta = 0$$

$$10 - 14\alpha + \beta = 0$$

$$\begin{array}{l} -1 \quad +4 + 4\alpha + \beta = 0 \\ 10 - 14\alpha + \beta = 0 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} -1 \quad +4 + 4\alpha + \beta = 0 \\ 10 - 14\alpha + \beta = 0 \end{array}} \right\}$$

$$\frac{10 - 14\alpha + \beta = 0}{14 - 10\alpha = 0}$$

$$\beta = \frac{48}{5}$$

$$\alpha = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$$

El plano solución es

$$(x + 2y - 3z) + \frac{7}{5}(x - 4y + z - 2) + \frac{48}{5} = 0$$

$$\boxed{6x - 9y - 4z + 17 = 0}$$

280 Hallar la ecuación de plano que pasa por los puntos $(5, 0, 2)$ y $(1, 4, 2)$ y es paralelo a la recta.

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-1}{3}$$

El paralelismo entre recta y plano es una condición; por ello en el enunciado exigimos que pase además por dos puntos.

La condición para que el plano $Ax + By + Cz + D = 0$ y la

recta $\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$

sean paralelos es:

$$A \cdot a + B \cdot b + C \cdot c = 0$$

En nuestro caso tendremos:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$A + 4B + 3C = 0$$

$$5A + 3C + D = 0$$

$$A + 4B + 7C + D = 0$$

Para que el sistema homogéneo tenga solución:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$3x + 3y - 5z = 5$$

(281)

Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(1, 0, 0)$ y es paralelo a las rectas.

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{4}, \quad y \quad \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-4}{-1}$$

Se la ecuación del plano sea $Ax + By + Cz + D = 0$,
por ser este plano paralelo a las dos rectas se verifica:

$$\begin{aligned} 2A + 2B + 4C &= 0 \\ 3A \quad \quad -C &= 0 \end{aligned}$$

la ecuación de punto:

$$A \quad + D = 0$$

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$A \quad \quad + D = 0$$

$$2A + 2B + 4C = 0$$

$$3A \quad \quad -C = 0$$

$$\left| \begin{array}{ccc|c} x & y & z & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right| = 0$$

$$x - 7y + 3z - 1 = 0$$

282 Hallar la ecuación del plano que pase por el punto $(2, 0, 3)$ y por la recta

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-2}{3}$$

$$\begin{cases} x-1=2y+6 \\ 3y+9=z-2 \end{cases} \quad \begin{cases} x-2y=z \\ 3y-z=-11 \end{cases} \quad (\text{plano proyectante paralelo al eje } OZ) \quad (\text{" " " " " " al eje } OX)$$

La ecuación del haz de planos que pasan por la recta es:

$$(x-2y-7) + \lambda(3y-z+11) = 0$$

Obligando a que pase por el punto $(2, 0, e)$

$$2-7 + \lambda(-3+11) = 0 \quad -5 + \lambda 8 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = +\frac{5}{8}}$$

sustituyendo este valor

$$(x - 2y - 7) + \frac{5}{8}(2y - 2111) = 0$$

$$8x - y - 5z = 1$$

283 Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(2, -1, 3)$, y $B(5, 0, 4)$

Basta aplicar la fórmula que nos proporciona la ecuación de la recta que pasa por dos puntos (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) :

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

sustituyendo:

$$\frac{x-2}{2-5} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{3-4}$$

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1}$$

284 Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, 3, 4)$ y es paralela a la recta.

$$\frac{x-2}{-3} = \frac{y+1}{+1} = \frac{z+5}{2}$$

$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$$

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y-3}{+1} = \frac{z-4}{2}$$

285 Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2, -1, 5)$ y es paralela a los planos $2x+3y-4z=6$ y $3x-y+z=4$

- La ecuación general de los planos paralelos a uno dado $P=0$ es

$$P+\lambda=0$$

$$* \quad 2x+3y-4z-6+\lambda=0$$

$$4-3-20-6+\lambda=0 \Rightarrow \lambda=25$$

$$2x+3y-4z+19=0$$

$$* \quad 3x-y+z-4+\lambda=0$$

$$6+1+5-4+\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-8$$

$$3x-y+z-12=0$$

286

Dada la recta.

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{3} \text{ y el plano } x-y+z=5 \text{ hallar:}$$

1º) coordenadas del punto de intersección.

2º) Expresar mediante dos planos la recta dada.

- Para expresar la recta mediante las ecuaciones de dos planos basta desglasar su ecuación

$$\left. \begin{array}{l} 2(x-1) = 4(y+3) \\ 3(y+3) = 2(z+2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} x-2y=7 \quad (\text{plano proyectante paralelo al eje } OZ) \\ 3y-2z=-5 \quad (\text{" " " " al eje } OX) \end{array}$$

la ecuación general de haz de planos que pasan por la recta es:

$$(x-2y-7) + \lambda(3y-2z+5) = 0$$

Hallamos el punto de intersección:

Resolviendo el sistema

$$\left. \begin{array}{l} x-2y=7 \\ 3y-2z=-5 \\ x-y+z=5 \end{array} \right\}$$

$$x = \frac{17}{5}; \quad y = \frac{-7}{5}; \quad z = \frac{-1}{5}$$

287) Estudiar cuáles son las condiciones para que una recta dada en forma continua sea paralela a un plano. Idem para que esté contenida en un plano.

1º) si la recta $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ ha de ser paralela al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ debe verificarse que dicha recta y una perpendicular al plano formen ángulo de 90° . Los cosenos directores de dicha perpendicular al plano son:

$$\cos \alpha' = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} ; \cos \beta' = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} ; \cos \gamma' = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

- los cosenos directores de la recta son

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} ; \cos \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} ; \cos \gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

- como han de ser perpendiculares resulta:

$$A \cdot a + B \cdot b + C \cdot c = 0$$

288) Pasar a forma continua la recta.

$$x + 2y + z = 0 ; x - 3y + 2z = 4.$$

la recta viene dada por la $\cap$ de dos planos y podemos pasar a la forma continua:

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

Para ello, restando ambas ecuaciones

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x - 3y + 2z = 4 \end{cases} \Rightarrow z = 5y + 4$$

$$-5y + z = 4$$

$$x + 2y + z = 0$$

$$-(x - 3y + 2z) = 4$$

$$5y - z = -4$$

$$\Rightarrow y = \frac{z-4}{5}$$

Sustituyendo en la primera

$$x + 2y + 5y + 4 = 0 \Rightarrow y = \frac{x+4}{-7}$$

luego la ecuación buscada es:

$$\frac{x+4}{-7} = \frac{y}{1} = \frac{z-4}{5}$$

289) Averiguar si se cruzan las rectas.

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{4} ; \quad \frac{x+2}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{4}$$

el vector dirección de la primera recta es $\vec{V}_1(3, 2, 4)$
" " " " segunda " " $\vec{V}_2(-1, 2, 4)$

$$(x_1, y_1, z_1) = (1, -2, 3)$$

$$(x_2, y_2, z_2) = (-2, -3, 0)$$

consideramos el vector cuyos componentes son $\begin{cases} x_2 - x_1 = -3 \\ y_2 - y_1 = -1 \\ z_2 - z_1 = -3 \end{cases}$

Si las dos rectas se cortan, el determinante formado por los componentes de los tres vectores de andarse

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 4 \\ -3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -18 - 24 + 4 - (-24 + 6 - 12) = -18 - 24 + 4 + 24 - 6 + 12 = 18 - 24 = -6 \neq 0$$

luego las rectas se cruzan

si es = 0 se cortan
si es $\neq 0$ se cruzan

290) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(3, 2, -1)$ y es perpendicular a la recta.

$$\frac{x-2}{5} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

Dada la recta:

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

La ecuación general de todos los planos perpendiculares a esta recta es:

$$ax + by + cz + \lambda = 0$$

- Particularizando para los datos del problema.

$$5x - y + 2z + \lambda = 0$$

- el punto $(3, 2, -1)$

$$15 - 2 - 2 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -11$$

Solución

$$5x - y + 2z = 11$$

291) Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta

$$\frac{x}{3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-4}{1} \text{ y que además es perpendicular al plano}$$

$$5x - y + 4z = 2.$$

- Hallamos la ecuación del haz de planos que pasan por la recta dada

$$\begin{cases} -2x = 3y - 9 \\ y - 3 = -2z + 8 \end{cases}$$

$$(2x + 3y - 9) + \lambda(y + 2z - 11) = 0$$

$$2x + 3y - 9 + \lambda y + 2\lambda z - 11\lambda = 0$$

$$2x + (3 + \lambda)y + 2\lambda z - 11\lambda - 9 = 0$$

la condición para que dos planos

Sean perpendiculares:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

por consiguiente.

$$5 \cdot 2 - (3 + \lambda) + 4 \cdot 2\lambda = 0$$

$$10 - 3 - \lambda + 8\lambda = 0$$

$$7 + 7\lambda = 0 \quad \lambda = -1$$

el plano solución es $x + y - z = -1$

(292) Hallar la ecuación del plano que pase por los puntos $A(3, 2, -1)$ y $B(4, 0, 2)$ y sea perpendicular al plano $x - 5y + 2z = 6$
la ecuación de la recta AB es:

$$\frac{x-3}{3-4} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-1-2}, \text{ es decir } \begin{cases} 2x-6 = -y+2 \\ -3y+6 = 2z+2 \end{cases}$$

La ecuación del haz de planos:

$$(2x+y-8) + \lambda(3y+2z-4) = 0$$

$$2x+y-8 + 3\lambda y + 2\lambda z - 4\lambda = 0$$

$$2x + (1+3\lambda)y + 2\lambda z - 4\lambda - 8 = 0$$

Imponemos la condición de qe sea perpendicular al plano dado

$$2 - 5(1+3\lambda) + 2 \cdot 2\lambda = 0$$

$$2 - 5 - 15\lambda + 4\lambda = 0$$

$$-3 - 11\lambda = 0 \Rightarrow -3 - 11\lambda = 0 \quad \lambda = -\frac{3}{11}$$

Resultado el plano:

$$11x + y - 3z = 38$$