

① $y = \varphi(x, c)$
 derivando respecto de x $\left\{ \begin{array}{l} F(x, y, y') = 0 \text{ e. d. f. de las familias de curvas.} \\ \frac{dy}{dx} = \frac{d\varphi}{dx}(x, c) \end{array} \right.$

② $F(x, y, y', \dots, y^n) = 0$ ec. dif. ordinaria $F: D \subset \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}$
 $y = y(x) \quad \text{Ec } \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ * condiciones que deben de verificarse:}$

- 1.- $y \in \mathcal{C}^n(I)$ subdominio
- 2.- $(x, y, y', \dots, y^n) \in D \quad \forall x \in I$
- 3.- $F(x, y, y', \dots, y^n) = 0$

} si se cumple es una solución particular

③ Ec. diferencial de 1er ORDEN
 $G(x, y, y') = 0$
 $y = F(x, y)$ forma normal.
 $\frac{dy}{dx} = F(x, y)$ forma diferencial.

Solución de una ec. diferencial: una relación función en las que aparezca las variables que sean pero que estén desprovistas de derivadas

- Ec. dif. variable separables $f(x)dx + g(y)dy = 0$
 $f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$ $f_2(x), g_2(y) \neq 0$
 $y' = -\frac{f_1(x)}{g_1(y)}$ $g(y) \neq 0$
- Ec dif variable separables
- EC HOMOGÉNEA una función homogénea de grado n es: $F(x, y) = F(tx, ty) = t^n F(x, y)$
 cuando es de grado cero entonces es una función homogénea.
 (se pone en forma normal)
 también se puede representar $y' = G\left(\frac{y}{x}\right)$ (dividiendo entre x)
- Ec dif. de la forma $y' = f(ax + by + c)$

$ax + by + c = u \quad y' = f(u)$
 ↓ derivando respecto de x

$a + by' = u' \Rightarrow a + b f(u) = u' \quad \frac{du}{dx} = a + b f(u) \quad \boxed{\frac{du}{a + b f(u)} = dx}$

- Ec dif de la forma

$y' = F\left(\frac{ax + by + c}{mx + ny + p}\right)$ se llama ec. reducibles o homogéneas.

- 1.- supongamos $c = p = 0$

$y' = F\left(\frac{ax + by}{mx + ny}\right) = F\left(\frac{a + b\frac{y}{x}}{m + n\frac{y}{x}}\right) = G\left(\frac{y}{x}\right)$ es una ec. homogénea.
 dividiendo por x

- 2.- supongamos que la recta $ax + by + c = 0$ y " " " $mx + ny + p = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} (a, b) \\ (m, n) \end{array} \right.$ puede presentarse que sean secantes o sean paralelas

④

ECUACION LINEAL

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = a_2(x)$$

condición $\left\{ \begin{array}{l} a_0(x) \neq 0 \\ a_0(x), a_1(x), a_2(x) \\ \text{sea cont en ese} \\ \text{punto.} \end{array} \right.$

$$y' + \frac{p(x)}{a_0(x)} y = \frac{q(x)}{a_0(x)} \Rightarrow y' + p(x)y = q(x)$$

ECUACION LINEAL

- ① $q(x) = 0$ ec. lineal homogénea
 ② $q(x) \neq 0$ ec. lineal completa $\left\{ \begin{array}{l} a) \text{ por una forma directa} \\ b) \text{ metodo de variacion etc.} \end{array} \right.$

FORMA NORMAL DE LA ECUACION DE BERNOULLI

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{p(x)}{q(x)} \text{ tiene que ser continua para que} \\ \text{tenga solucion} \\ \alpha \in \mathbb{R} \alpha \neq 0, 1 \end{array} \right.$$

ECUACION LINEAL RICCATI

$$y' + p(x)y + q(x)y^2 + r(x) = 0$$

- $\left\{ \begin{array}{l} \text{si } r(x) = 0 \rightarrow \text{Bernoulli} \\ \text{si } q(x) = 0 \rightarrow \text{lineal completa} \\ \text{si } p, q, r = \text{cte} \rightarrow \text{variable separable} \end{array} \right.$
 cuando se cumple algunos de estos casos lo puedo resolver cuando conozca la solución particular

$$y, \quad y = y_1 + z$$

⑤

ECUACION DIFERENCIAL

EXACTA.

$$F(x, y) = C$$

ec. dif.

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0$$

$$\text{si } \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\rightarrow \text{si } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C = F(x, y) = \int P(x, y) dx + P(y) \\ \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y) \end{array} \right.$$

se le llama
Factor INTEGRAL
 si la ec. dif.
 no es exacta.

- 1º caso $\mu = \mu(x)$ que solo depende de x

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} dx$$

- 2º caso $\mu = \mu(y)$ que solo depende de y

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P} dy$$

- 3º caso depende de x e y $\mu = \mu(x+y)$

$$\mu \rightarrow u = x+y \quad \frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q - P} du \quad H(u) = H(x+y)$$

- 4º caso depende de xy $\mu = \mu(xy)$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{yQ - xP} du \quad H(u) = H(xy)$$

el valor
 de μ
 que consig.
 uno de los
 en los casos
 lo multiplico
 a la ec.
 diferencial.

$$\mu \frac{\partial F}{\partial x} dx + \mu \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0$$

* Toda ecuación singular.

⑥ ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES

EN y' (no se puede despejar)

1er caso Resolubles en y' (si es polinomio se puede factorizar)
 $P_1(x,y)(y')^n + P_2(x,y)(y')^{n-1} + \dots + P_n(x,y)y' + P_{n+1}(x,y) = 0$
 2do caso ECUACIONES DE LAGRANGE $y = x f(y') + g(y')$ $y' = p$
 $\frac{dp}{dx} [x f'(p) + g'(p)] = [p - f(p)]$
 $p - f(p) \neq 0$
 $p - f(p) = 0$ se resuelve las ecuaciones

3er caso ECUACION DE CLAIRAUT

$$y = x y' + g(y')$$

$$(1) y = x p + g(p)$$

$$p = p + x \frac{dp}{dx} + g'(p) \frac{dp}{dx} \quad \frac{dp}{dx} (x + g'(p)) = 0$$

$P_1(x,y)[y' - f_1(x,y)][y' - f_2(x,y)] \dots [y' - f_n(x,y)] = 0$
 $y' - f_1(x,y) = 0 \Rightarrow F_1(x,y,c) = 0$
 $y' - f_2(x,y) = 0 \Rightarrow F_2(x,y,c) = 0$
 $\vdots$
 $y' - f_n(x,y) = 0 \Rightarrow F_n(x,y,c) = 0$
 Saldrán un conjunto de familias se tendrá que construir a trozos.

1er $\frac{dp}{dx} = 0 \quad p = c \quad \boxed{y = cx + g(c)}$
 familias de rectas
 2er $x + g'(p) = 0 \quad x = -g'(p) \quad (1)$
 $\boxed{y = -g(p)p + g(p)}$
 es sol. sing.

⑦ ECUACIONES RESOLUBLES EN Y

se puede despejar en y
 $y = f(x, y')$ $p = p(x)$
 $y = f(x, p)$
 $\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dx}$
 $F(x, p, c) = 0$
 $y = f(x, p)$ solución general en paramétrica

⑧ EQUAC. RESOLUBLES EN X

la x se puede despejar
 $x = f(y, y')$ $y' = p(y)$
 $x = f(y, p)$ derivado resp. dx
 $1 = \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dx}$
 $F(y, p, c) = 0$
 $x = f(y, p)$
 esta es forma paramétrica la solución general.

⑨ cuando no es resoluble en y' y no es resoluble en x ni en y en ninguno de estos casos se puede derivar

⑩ NO APARECE LA VARIABLE Y
 $f(x, y') = 0$

1er caso $y' = g(x)$ $y = \int g(x) dx + c$
 2er caso $x = g(y')$ $\frac{dy}{dx} = p$ $\begin{cases} x = g(p) \\ y = \int p g'(p) dp \end{cases}$ solución general en forma paramétrica.
 3er caso deducir una ec. paramétrica para x y para p
 $x = \alpha(t)$ $dy = p dx = \beta(t) \alpha'(t) dt$
 $p = \beta(t)$ $\begin{cases} y = \int \beta(t) \alpha'(t) dt \\ x = \alpha(t) \end{cases}$ ec. paramétrica solución general

ECUACIONES
LINEALES CON
COEF. CTE.
 $L[y] = f(x)$

Raíces Simples $\left\{ \begin{array}{l} 1.a \text{ raíces reales (son ind. ind } w \neq 0.) \quad \{ e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \dots, e^{r_n x} \} \\ 1.b \text{ raíces reales complejas. } \{ e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \dots, e^{ax} \cos bx, e^{ax} \sin bx \} \end{array} \right.$

Raíces múltiples $\left\{ \begin{array}{l} 2.a \text{ raíces múltiples reales } \{ e^{r_1 x}, x e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, x e^{r_2 x}, \dots \} \\ 2.b \text{ raíces múltiples complejas } \{ e^{ax} \cos bx, e^{ax} \sin bx, x e^{ax} \cos bx, x e^{ax} \sin bx, \dots \} \end{array} \right.$

RESOLVER EC.
LINEAL COMPLETA
CON COEF. CTE.

- Se calcula primero
el sistema fundamental.

① Método de variación de cte.

$f(x) = \text{sea un polinomio.}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{si } r=0 \text{ no es solución } \tilde{y}(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots \\ \text{si } r=0 \text{ es solución } \tilde{y}(x) = x^K (B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \dots) \end{array} \right.$ K grado de multiplicidad.

② Método de coef.
indeterminados.

exponencial.
 $f(x) = e^{ax} [A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots]$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{si } r=a \text{ no es soluc. } \tilde{y}(x) = e^{ax} [B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \dots + B_m] \\ \text{si } r=a \Rightarrow \tilde{y}(x) = x^K e^{ax} [B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \dots + B_m] \end{array} \right.$ K grado de multiplicidad.

exponencial y multiplicar a
coseno y seno.
 $f(x) = e^{ax} [Q_r(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x]$ $\left\{ \begin{array}{l} * c + \beta i \text{ no sea solución } P(a + \beta i) \neq 0, \\ \tilde{y}(x) = e^{ax} [R_s(x) \cos \beta x + T_s(x) \sin \beta x] \text{ donde } s = \max(r, m) \\ * a + \beta i \text{ es solución } P(a + \beta i) = 0 \text{ } K \text{ grado de multiplicidad de las raíces.} \\ \tilde{y}(x) = x^K e^{ax} [R_s(x) \cos \beta x + T_s(x) \sin \beta x] \end{array} \right.$

③ OPERADOR INVERSO.

Ecuaciones
reducibles
a orden superior.

- 1.- Ecuaciones en la que no aparece la variable y
 - a) $F(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ $y' = p(x)$ $F(x, p, p', \dots, p^{(n-1)}) = 0 \xrightarrow{\text{Integr.}} G(x, p) = 0, G(x, y') = 0.$
 - b) $F(x, y^k, \dots, y^{(k+1)}) = 0$ $y^{(k)} = p(x)$ $F(x, p, \dots, p', \dots, p^{(n-k)}) = 0 \Rightarrow G(x, p) = 0$ $y^{(k)} = p \rightarrow y$
- 2.- No aparece la variable x

$$\begin{cases} y' = p(y) & y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \frac{dy}{dx} = p'p & y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = (p')^2 p + p''p^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 & F(y, p, p', p'' \dots, p^{(n-1)}) = 0 \xrightarrow{\text{Integr.}} G(y, p) = 0 \end{cases}$$
- 3.- Ecuaciones en las que solo aparece dos variables y . (y se diferencia a dos grados)

Ecuaciones homogéneas de la variable y

$$\begin{cases} f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) & y = e^{u(x)} \\ f(x, y, y', \dots, y^{(k)}) = k^k f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) & \text{se dice que es una función homogénea de grado } k. \end{cases}$$

Ecuaciones diferenciales exactas de orden n

$$z_1 + z_2 + \dots + z_k + \int g(x) dx = c.$$

Ecuación diferencial lineal de orden n

$$\begin{cases} a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_n(x)y' = f(x) \\ \begin{cases} f(x) = 0 & \text{E.C. lineal homogénea} \\ f(x) \neq 0 & \text{E.C. completa} \end{cases} \end{cases}$$

Resolución del orden de una ecuación lineal homogénea.
$$\begin{cases} \text{solución particular } y_1 = e^x & / \underline{y = e^x \cdot z} / \end{cases}$$

Método de variación de cte. (forma para calcular la ec. lineal completa por cualquier e. lineal)

Ecuaciones lineales