

TEMA 4 EQUILIBRIO DEL PUNTO Y DE LOS SISTEMAS

Un punto material libre es aquel que puede moverse en una dirección arbitraria sin obstáculo de ninguna clase.

Un punto material no libre: está limitado por ciertos vínculos con el exterior que condicionan su movilidad.

Los vínculos que disminuyen su posibilidad de movimientos se denominan enlace o restricciones.

ECUACIONES DE EQUILIBRIO DEL PUNTO MATERIAL.

modulo de la fuerza

$$R = \left[(\sum X_k)^2 + (\sum Y_k)^2 + (\sum Z_k)^2 \right]^{1/2}$$

direccion

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{\sum X_k}{R} \\ \cos \beta = \frac{\sum Y_k}{R} \\ \cos \gamma = \frac{\sum Z_k}{R} \end{cases} \quad (1)$$

$$X = \sum X_k = 0 \quad Y = \sum Y_k = 0 \quad Z = \sum Z_k = 0$$

Para que el punto este en equilibrio bajo la acción de un sistema de fuerzas se requiere que la suma algebraica de las proyecciones de las fuerzas sobre cualquier eje sea nula. Si el sistema es plano bastara que se verifiquen tan solo dos de las ecuaciones (1)

EQUILIBRIO DE UN SOLIDO RIGIDO LIBRE.

Para que un solido este en equilibrio sera preciso que la resultante general del sistema exterior que obra sobre el solido sea nula.

$$f(x, y, z) = 0 \quad x = \sum x_j = 0 \quad y = \sum y_j = 0 \quad z = \sum z_j = 0$$

Pero el equilibrio exige además que este no gire alrededor de ningún eje o punto. Ello implica que el momento resultante del sistema sea nulo.

$$M_x = 0 \quad M_y = 0 \quad M_z = 0 \quad M = (M_x^2 + M_y^2 + M_z^2)^{1/2}$$

Mov. Rectilíneo: La trayect. recta define en cualquier caso un mov. rectilíneo. Cuando se presenta este tipo de trayectoria, al ser el radio de curvatura infinito, se deduce inmediatamente que no existe aceleración normal. Adoptado como eje x el del movimiento la ecuación sería $x = x(t)$

y en consecuencia, tanto la velocidad como la aceleración tienen la misma dirección que la trayectoria $\dot{x} = x'(t)$ $\ddot{x} = x''(t)$

a) M.R.U:	$v = \text{cte}$	$x = x_0 + v_0 t$	$a = 0$
b) M.R.U.A o M uniformemente variado.	$a = \text{cte}$ $v = v_0 + at$ $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$		

Ejemplo.

Un punto se mueve en una trayectoria rectilínea verificando en todo momento que $x = 2v + 1$

donde x está en m y v en m/s. Sabiendo que en el instante inicial lleva recorrido 2m, determinar la aceleración cuando $t = 0$.

(1) $v = \frac{dx}{dt}$ $x = 2v + 1 \Rightarrow \frac{x-1}{2} = v$ sustituyendo en (1)

$$\frac{x-1}{2} = \frac{dx}{dt} \quad \int_0^t \frac{dt}{2} = \int_{x_0=2}^{x=x} \frac{dx}{(x-1)}$$

$$\frac{t}{2} = \left[\ln(x-1) \right]_2^x \quad t = 2 \ln(x-1)$$

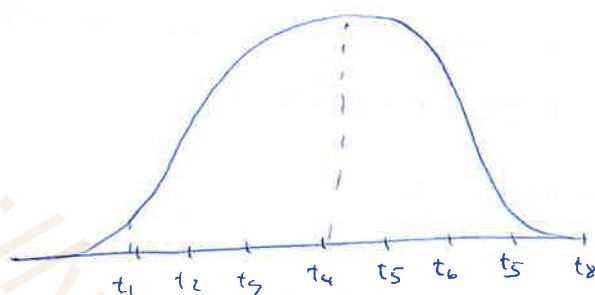
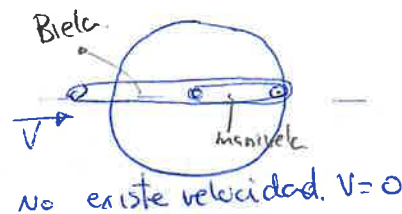
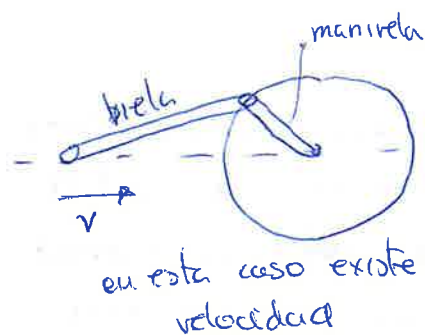
hay que poner x en función de t $x = f(t)$.

$$\frac{t}{2} = \ln(x-1) \quad e^{t/2} = x-1 \quad x = e^{t/2} + 1$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} e^{t/2}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{1}{4} e^{t/2} \quad \text{cuando } t=0 \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{4}}$$

TEMA 6:



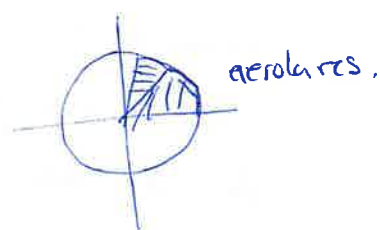
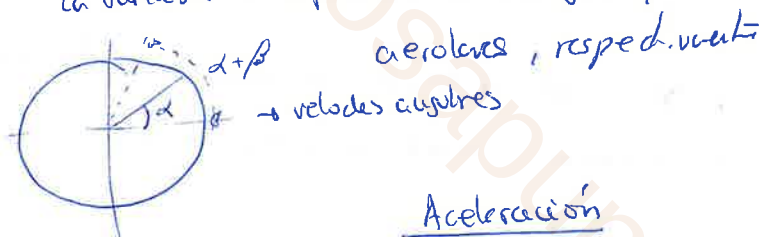
$$\frac{d^2x}{dt^2} > 0 \quad \text{maximo}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} < 0 \quad \text{minimo}$$

para calcular los max y min de iguala $\frac{dx}{dt} = 0$ y la derivada

de $\frac{dx}{dt}$ es la velocidad entonces $V=0$ no existe velocidad para los max y minimo.

un variable s representa a un angulo, o una área, las velocidades serian angulares, o



Aceleración

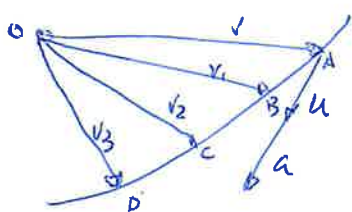
$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = v \frac{d\vec{u}_n}{dt} + \frac{dv}{dt} \vec{u}_t = \vec{a}_n + \vec{a}_t$$

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

$$a = (\vec{a}_n^2 + \vec{a}_t^2)^{1/2} = \left[\left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \frac{v^4}{\rho^2} \right]^{1/2}$$

Si por un punto O fijo del espacio, se trazasen en cada instante el vector velocidad correspondiente a ese momento se dibujaría una curva ABCD denominada hodógrafo del movimiento, se tiene propiedades interesantes para el estudio de la aceleración, ya se permite observar como varía el vector velocidad a lo largo del tiempo.



Hodografo.

MOVIMIENTO CURVILINEO.

En el caso de que el punto recorra una trayectoria algebraica en general en el espacio, lo usual es conocer los componentes del vector $r(t)$, posición del punto, sobre los tres ejes cartesianos.

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{ecuaciones} \\ \text{paramétricas de la} \\ \text{trayectoria} \end{array} \quad \text{donde el parámetro es el tiempo.}$$

$$\left. \begin{aligned} v_x &= x'(t) \\ v_y &= y'(t) \\ v_z &= z'(t) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{ec. paramétricas} \\ \text{de la velocidad.} \\ \text{o ec. del movimiento, coordenadas del} \\ \text{movimiento o posición del punto móvil.} \end{array} \quad \text{su módulo } v = (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)^{1/2}$$

$$\left. \begin{aligned} a_x &= x''(t) \\ a_y &= y''(t) \\ a_z &= z''(t) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{ec. paramétricas} \\ \text{de la aceleración.} \end{array} \quad \text{su módulo } a = (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)^{1/2}$$

Ejemplo: Un punto recorre la trayectoria helicoidal dada por las ecuaciones

$$x = r \cos \omega t \quad y = r \sin \omega t \quad z = kt$$

Determinar la velocidad, la aceleración y el radio de curvatura de la helice.

$$v_x = -r\omega \sin \omega t \quad v_y = r\omega \cos \omega t \quad v_z = k$$

$$v = \sqrt{r^2 \omega^2 \sin^2 \omega t + r^2 \omega^2 \cos^2 \omega t + k^2} = \sqrt{r^2 \omega^2 + k^2}$$

$$a_x = -r\omega^2 \cos \omega t \quad v_y = -r\omega^2 \sin \omega t \quad v_z = 0$$

$$a = \sqrt{r^2 \omega^4 \cos^2 \omega t + r^2 \omega^4 \sin^2 \omega t} = \sqrt{r^2 \omega^4} = r\omega^2$$

$$a^2 = a_t^2 + a_n^2$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 0$$

$$a = a_n$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{r^2 \omega^2 + k^2}{r\omega^2} = r + \frac{k^2}{r\omega^2}$$

MOVIMIENTO CIRCULAR.

cuando la trayectoria es una circunferencia el movimiento se denomina circular.

$$\boxed{w = \frac{d\theta}{dt} = \text{cte}}$$

θ = es el ángulo recorrido sobre la circunferencia

w = la velocidad angular se mide rad/s

integrando $\boxed{\theta = \theta_0 + wt}$

$$V = \frac{ds}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} = r \cdot w$$

$$\boxed{s = s_0 + rwt} = s_0 + vt$$

al tener $|v| = \text{cte} \Rightarrow \nexists a_t$ quedando como única componente la aceleración normal que sería:

$$\boxed{a = a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{r^2 w^2}{r} = w^2 r}$$

M.C.U. Variado. ϵ aceleración angular. como $\epsilon = \text{cte}$, ϵ (rad/s²)

$$\epsilon = \frac{dw}{dt}, \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = \text{cte}$$

integrando resulta $\boxed{w = w_0 + \epsilon t}$ $\theta = \theta_0 + w_0 t + \frac{1}{2} \epsilon t^2$

la velocidad tangencial es $v = w \cdot r = w_0 r + \epsilon r t = v_0 + \epsilon r t$

de donde se deduce la a_t $a_t = \frac{dv}{dt} = \epsilon r$

y la aceleración normal se expresará mediante

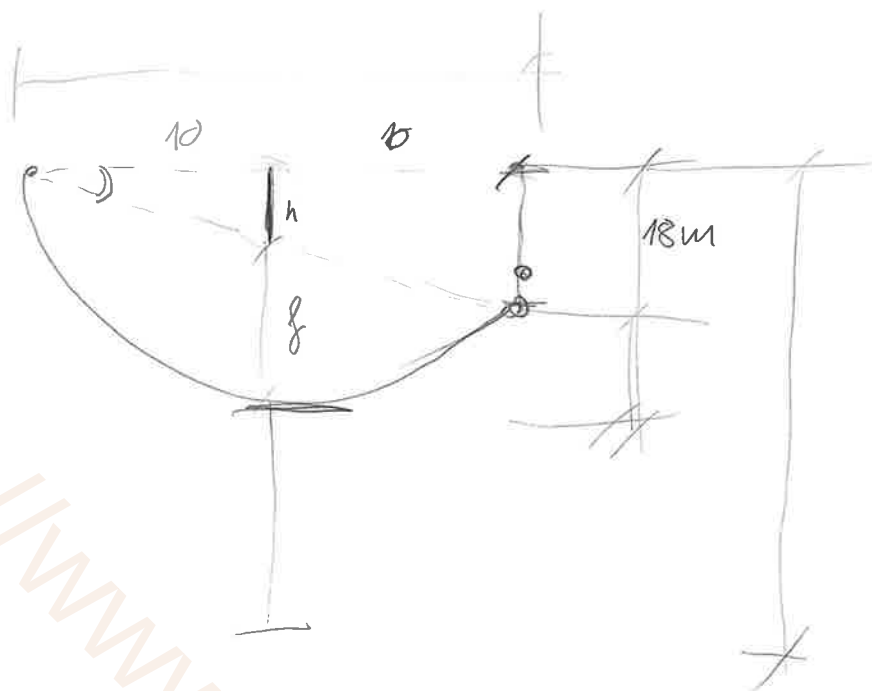
$$a_n = \frac{v^2}{r} = w^2 r = (w_0 + \epsilon t)^2 r. \quad \text{aquí } w \text{ no es cte.}$$

- o -

para pasar de r.p.m a rad/s (velocidad angular).

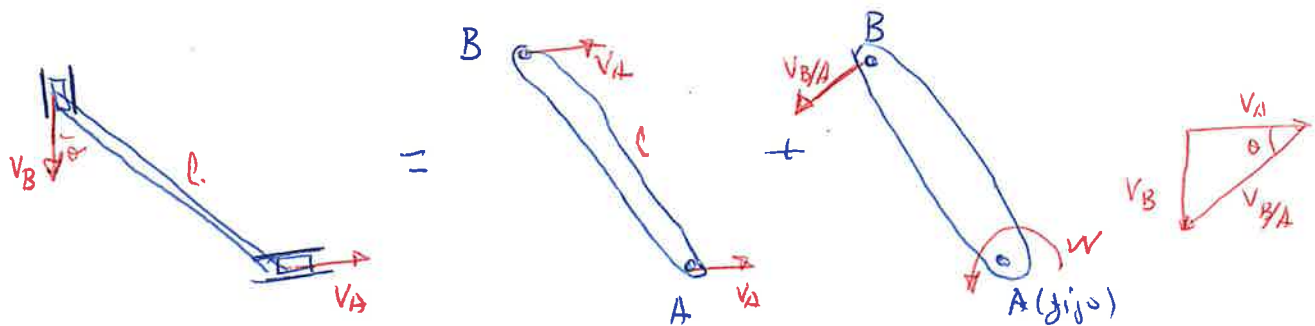
Ej. 1500 r.p.m.,

$$1500 \frac{\text{rev}}{\text{min.}} \cdot \frac{2\pi}{1 \text{ rev.}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = \boxed{50\pi \text{ rad/s}}$$



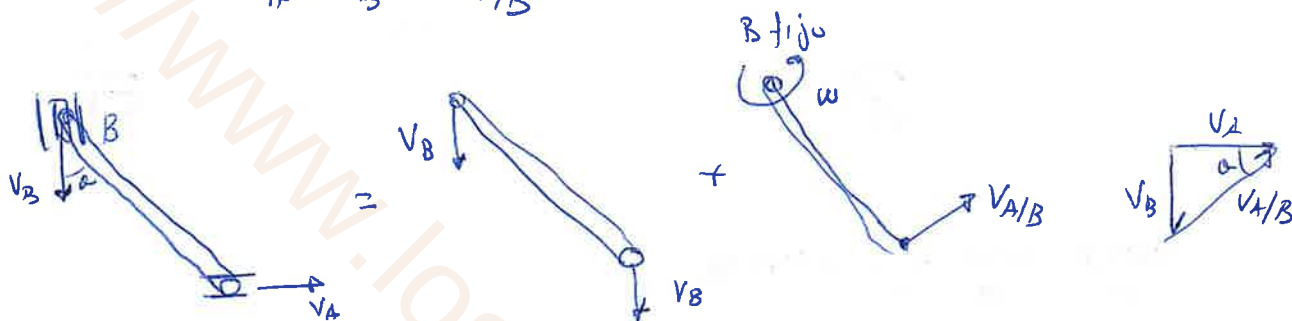
<https://www.losapuntes.netanbone.es>

$$V_B = V_A + V_{B/A}$$



Movimiento plano = traslación con A + Rotación sobre A

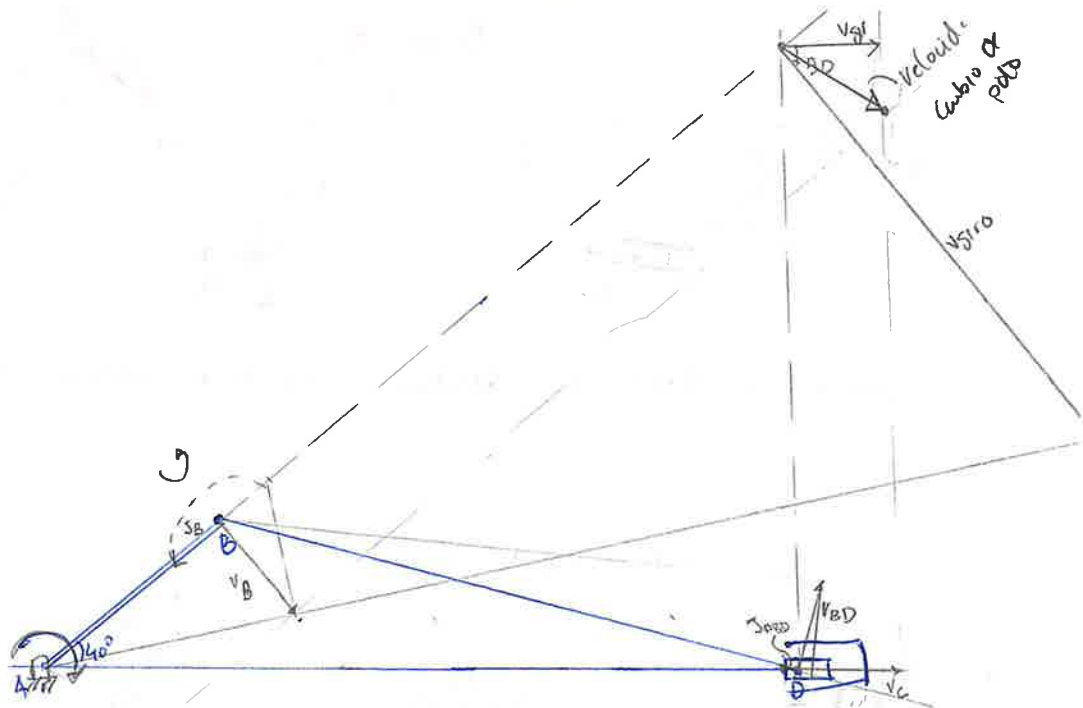
$$V_A = V_B + V_{A/B}$$



Movimiento plano = traslación con B + Rotación sobre B.

AB was recorded again at c. 2000 r.p.m

$$\cos 135^\circ = \frac{x}{8}$$

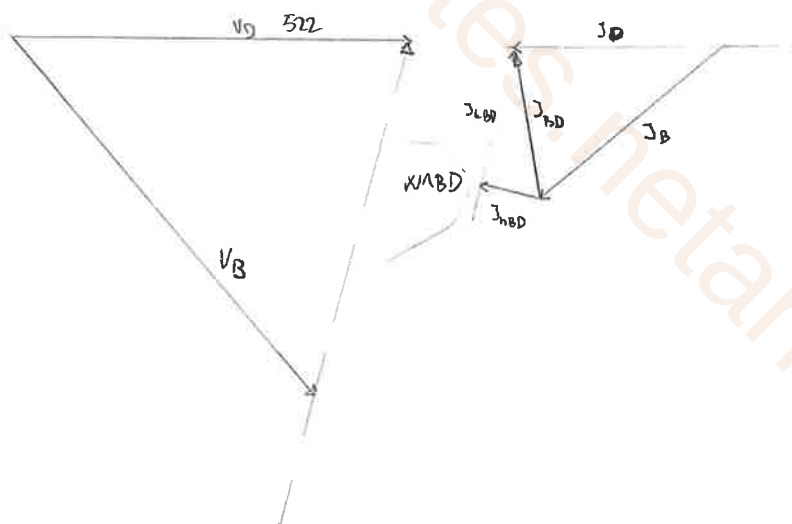


$$\frac{1000 \text{ rpm}}{60} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} \cdot \frac{1 \text{ hr}}{60 \text{ s}} = 209 \text{ rad/s}$$

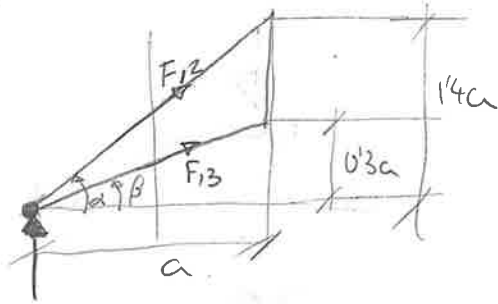
$$V_B = \omega_A \cdot AB = 209 \text{ rad/s} \cdot 3 = 628 \text{ m/s}$$

$$V_D = V_B + w^{\perp BD} \wedge BD$$

$$J_D = J_B + J_{E \rightarrow B} + J_{E \rightarrow D}$$



3.3



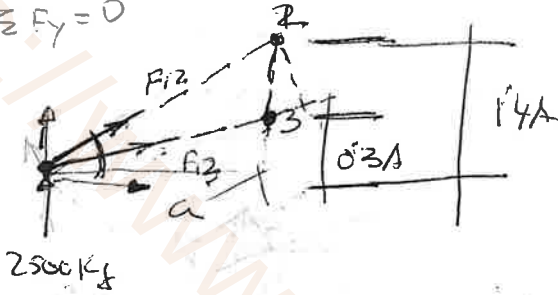
$$\tan \alpha = \frac{1.4a}{a} = 1.4 \quad \alpha = 54.4^\circ$$

$$\tan \beta = \frac{0.3a}{a} = 0.3 \quad \beta = 16.69^\circ$$

2500 Kg

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$



$$a^2 + 0.9a^2$$

$$\sqrt{a^2 (1+0.9)} = a \sqrt{1.9}$$

$$\oplus M_1 = -2500 \cdot a + F_{13} \cdot 1.4a \cdot \cos 16.69^\circ$$

$$F_{13} = 2603 \text{ Kg}$$

$$\oplus M_3 = -2500 \cdot a + F_{12} \cdot 1.4a \cdot \cos 54.4^\circ = 14315 \text{ Kg}$$

$$0.638 \cdot a$$

$$3918 \text{ Kg}$$

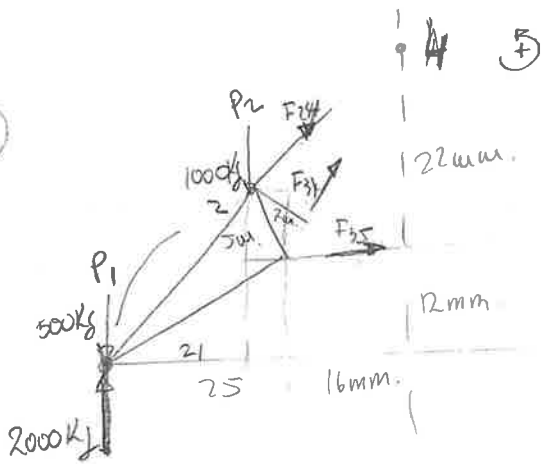
$$\oplus M_3 = -2500 \cdot a - \sin 37.71^\circ \cdot 1.044 \cdot F_{12}$$

$$3914.9 \text{ Kg}$$

$$\oplus M_3 = -2500 \cdot a + \cos 54.4^\circ \cdot a \cdot 0.3 \cdot F_{12} = F_1 = -14315 \text{ Kg}$$

$$- \sin 54.4^\circ \cdot a \cdot F_{12} = 3915 \text{ Kg}$$

5.5



F_{24} y F_{35} ~~no~~ producen momento sobre el 4.
 ya que están en el nodo 4.
 ya que pasan por el centro
 la estructura completa es 4000 kg
 pesetico es 2000 kg en cada
 apoyo.

$$\sum M_4 = -2000 \cdot 31 + F_{35} \cdot 22 + 500 \cdot 31 + 1000 \cdot 20 =$$

$$-68000 + F_{35} \cdot 22 + 15500 + 20000 =$$

$$F_{35} = 1204 \text{ kg}$$

tracción.

la P_2 y F_{24} no produce momento en ese punto ya que pasan por el punto 2.

$$\sum M_2 = -2000 \cdot 21 + 500 \cdot 21 + 1204 \cdot 5 + F_{34} \cdot 7 = 0$$

$$-42000 + 10500 + 6020 + F_{34} \cdot 7 = 0$$

$$F_{34} = 3640 \text{ kg}$$

es tracción

